ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Бабаджанов Шопулат Шомашрабович
канд. физико-матем. наук,
доцент кафедры
высшей и прикладной математики
Ташкентский финансовый институт
E-mail: sh.babadjanov@mail.ru
ORCID: 0000-0001-5513-4442

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы возможности использования методологических подходов математических наук в организации и исследовании экономических процессов. В частности, отмечается целесообразность проведения экономических исследований на базе принципа наименьшего действия

Ключевые слова: пространство экономической системы, товар, актив, фазовое пространство, траектория, принцип наименьшего действия, вариационное исчисление, функционал, функция Лагранжа, уравнения Эйлера – Лагранжа.

IQTISODIYOTDA ENG KAM HARAKAT PRINSIPINI QO'LLASH

Babadjanov Shopulat Shomashrabovich
fizika-matematika fanlari nomzodi
oliy va amaliy matematika kafedrasi dotsenti
Toshkent moliya instituti
E-mail: sh.babadjanov@mail.ru
ORCID: 0000-0001-5513-4442

Annotatsiya

Maqolada iqtisodiy jarayonlarni tashkil etish va o'rganishda matematika fanining metodologik yondashuvlaridan foydalanish masalalari tahlil qilinib, iqtisodiy tadqiqotlarni eng kam harakat tamoyili asosida olib borish maqsadga muvofiqligi tadqiq etilgan.

Kalit so'zlar: iqtisodiy tizim makoni, tovar, aktiv, fazoviy maqon, trayektoriya, eng kam harakat tamoyili, variatsion hisob, funksional, Lagranj funksiyasi, Eyler-Lagranj tenglamalari.

ISSN: 2181-3965
VOLUME 2

APPLICATION OF THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION IN ECONOMICS

Babadjanov Shopulat Shomashrabovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Associate Professor
Department of Higher and Applied Mathematics
Tashkent Institute of Finance.
E-mail: sh.babadjanov@mail.ru
ORCID: 0000-0001-5513-4442

Abstract

This paper discusses questions about the possibility of using methodological approaches of natural and mathematical sciences to the organization and study of economic processes. In particular, the expediency of conducting economic research based on the principle of least action is noted.

Keywords: economic system space, commodity, asset, phase space, trajectory, principle of least action, calculus of variations, functional, Lagrange function, Euler-Lagrange equations.

Введение

Математические модели подавляющего большинства замкнутых физических систем базируются на вариационных принципах, т.е. постулируется, что уравнения, описывающие эволюцию системы, являются уравнениями Эйлера – Лагранжа некоторого функционала. В связи с этим вариационные методы являются одним из основных инструментов исследования многочисленных задач естествознания.

Известно, что задачи, допускающие вариационную постановку, позволяют максимально ослабить математические ограничения, накладываемые на разыскиваемые решения, а также строить априори устойчивые разностные схемы для их численной реализации. Вариационное исчисление лежит у истоков теории оптимального управления и оптимального проектирования конструкций. Поэтому так велика популярность вариационных методов в механике, физике и инженерных расчетах.

Вариационное исчисление находит многочисленные приложения и в экономике ([1], [2], [8]).

В настоящей работе для описания экономической системы предложен вариационный подход, который, не подвергая сомнению основные экономические законы, позволит взглянуть на них под другим углом.

Обзор литературы

Впервые принцип наименьшего действия был предложен французским математиком и механиком Пьером Луи Моро де Мопертюи. Данный принцип был сформулирован в нечёткой форме и без доказательства [3]. Мопертюи формулирует свой принцип, согласно которому истинная траектория частицы отличается от любой другой тем, что действие для неё является минимальным (принцип Мопертюи) [4]. Провозгласив новый закон природы, заключающийся в минимальности действия, Мопертюи не дал, однако, чёткого определения той величины, которую требуется минимизировать [5]. Мопертюи провозгласил принцип наименьшего действия наиболее общим законом природы. Универсальность принципа наименьшего действия Мопертюи обосновывал исходя из метафизических представлений о природе, где все должно происходить из каких-то разумных соображений как будто бы природа в своих действиях преследует какие-то разумные цели, которые сама перед собою и ставит. Математиками Эйлером, Лагранжем, Гамильтоном, Остроградским, Якоби были установлены математически строгие выражения принципа наименьшего действия. Первая математическая формулировка принципа наименьшего действия была дана Эйлером. Со слов Лагранжа она звучит так: «Для траекторий, описываемых телами под действием центральных сил, интеграл скорости, помноженной на элемент кривой, будет всегда максимум или минимум» [5]. В 1834-1835 годах Уильям Роуэн Гамильтон опубликовал новый вариационный принцип, известный ныне как принцип стационарного действия или принцип Гамильтона [5]. Принципом наименьшего действия восхищались и посвящали ему свои научные работы также Ж. Даламбер, К. Гаусс, Г. Герц, Г. Гельмгольц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Э. Шредингер, М. Планк, Р. Фейнман и многие другие.

Принцип наименьшего действия в экономике рассмотрены в работах И.Г. Царева [6], [7].

Анализ и результаты

1. Пространство экономической системы. Каждое экономическое событие должно происходить в определенном пространстве. Это означает, что первым шагом в создании любой модели должно быть определение пространства, на котором задается система. С пространством связана определенная система отсчета координат (экономические переменные), позволяющая определить положение любой точки относительно начала координат (точки отсчета).

Мы также предполагаем, что выбранные координаты являются существенными, т.е. полностью определяют экономическую систему (именно полностью описывают важные для нас особенности системы).

Желательно выбирать экономические переменные таким образом, чтобы они были сравнимы между собой, т.е. чтобы для них можно было установить общую единицу измерения. В этом случае пространство является метрическим, т.е. можно ввести понятие расстояния и направления, например, от начала координат до конкретной точки.

В качестве возможных экономических переменных выделим следующие категории: товары (услуги), активы и блага. Товар – это продукт труда, предназначенный для обмена посредством купли-продажи. Способность обмениваться на другие товары дается товару стоимостью – абстрактным трудом. Правда воздух, неосвоенные земли, естественные луга, дикие леса созданы не трудом, хотя, как полезные вещи имеют свою цену. В противоположность товару актив – это любая ценность, принадлежащая участнику экономической системы. Кажется, эта экономическая категория подходит нам больше, чем товар, хотя категория товар (услуга) также может использоваться с упомянутыми оговорками. Категория благо – любой потребляемый объект, приносящий некоторое удовлетворение потребителю и поэтому имеющий свою цену – используется вместе с активом. Отметим, что, когда потребуется необходимо различать две крупные группы: потребительские блага, удовлетворяющие потребности людей непосредственно, и блага производственного характера, удовлетворяющие потребности людей косвенно.

Самым простым способом определить в качестве координат $\left(x_i, i=1,2,...,n\right)$ нашего пространства $\mathbf{R}^n$ количества благ (активов, товаров) нашей системы, выраженные в некоторых условных единицах. Положение точки в пространстве задает соответствующие количества активов, существующие в системе в данный момент времени. Очевидно, что эти координаты будут принимать только положительные значения. Положение точки определяется направлением на нее из начала координат и расстоянием от него, т.е. характеризуется вектором состояния. Предположим, что координаты явно зависят только от времени и независимы друг от друга.

Ясно, что если в системе имеется определенный набор благ, то количество этих благ являются компонентами радиус-вектора, определяющего положение точки, изображающее положение экономической системы в нашем пространстве. В том случае, когда количества благ

ISSN: 2181-3965
VOLUME 2

неизменны, то точка неподвижна (система покоится), но это состояние неинтересно для анализа. Когда количество благ начинают изменяться, то система приходит в движение. Тогда мы должны учесть скорость и направление движения системы, вводя с этой целью дополнительные координаты $\left(x_i', i=1,2,...,n\right)$, количество благ (активов, товаров) нашей системы, которые производятся и потребляются в системе за определенный промежуток времени (единицу времени). А значит мы вводим в качестве дополнительных координат производные от количества блага по времени, которые дают скорость изменения благ в системе. В будущем, если не указано иное, когда мы будем говорить о количестве какого-либо блага, которое было произведено (выпуске продукции) или потреблено, мы будем понимать это количество, как произведенное или потребленное за определенное время. Существенное отличие от просто количеств благ, которые могут принимать только положительные значения, наши дополнительные координаты могут принимать любые вещественные значения. Необходимо отметить, что в экономической литературе существует определенная путаница в этом вопросе. Это путаница заключается в том, что очень часто говорят о выпуске как о количестве блага и обозначают это количество как x, забывая упомянуть, что имеют ввиду количество благ, произведенных в единицу времени, т.е. скорость x'. Общеизвестно, что одновременное задание всех координат и скоростей полностью определяет состояние системы, т.е. задает точку в пространстве, называемую изображающей точкой, и позволяет в принципе предсказать ее дальнейшее движение. Таким образом, не требуется задания никаких производных более высокого (чем нулевой и первый) порядка, например, x_i'', x_i''' для полного описания движения системы. Этот нетривиальный факт является законом природы. Пространство $\mathbf{R}^{2n}$, заданное таким образом, называется фазовым пространством.

Многие экономические явления, и не только они, описываются с помощью функции f. Например, если в каждой точке пространства или некоторого его множества определено значение некой величины, то говорят, что задана функция или поле этой величины, зависящая от нескольких переменных n ее координат x_i: $f\left(x_i\right)$, которые, в свою очередь, являются функциями времени t. В зависимости от характера заданной величины говорят о скалярном или векторном поле в рассматриваемом множестве (области) пространства. Движение экономической системы (ее изображающей точки) в экономическом пространстве описывается траекторией. Траекторией называется геометрическое место точек, где экономическая система побывала за время своего движения, функцией ее координат x_i, которые, в свою очередь, являются функциями времени t. Не допустимо путать траекторию с интегральной кривой, описываемой точкой (t, x_i) в пространстве $\mathbf{R}^{2n+1}$. При движении экономической системы изменяются и ее функции. Мы будем полагать, что встречающиеся нам функции гладкие, т.е. непрерывно дифференцируемые нужное количество раз.

Функции определяются из уравнений, выражающих математически те законы, которые управляют исследуемым явлением. В большинстве случаев эти уравнения содержат производные искомых функций. Такие уравнения называют дифференциальными уравнениями.

2. Принцип наименьшего действия. Вариационное исчисление – это раздел функционального анализа, который занимается отысканием экстремумов (минимумов и максимумов) функционалов, т.е. функций, область определения которых являются бесконечномерном пространством, элементы которых являются кривые.

Если рассмотреть движение произвольной системы из одной точки пространства в другую, то, вообще говоря, система может совершить этот переход по разным траекториям, каждая из которых представляет собой некую кривую. Возможный набор траекторий задается уравнениями динамической системы и может быть, вообще говоря, бесконечным. Однако в большинстве случаев, кроме некоторых исключительных (т.е. при «обычных условиях») система будет двигаться таким образом, чтобы длина этой кривой была минимальной из всех возможных. Этот принцип движения динамической системы, который также является законом природы, носит название «принцип наименьшего действия Гамильтона». Указанный вариационный принцип позволяет рассматривать ряд последовательных состояний системы за конечный промежуток времени или, что, то же самое, на конечном отрезке траектории и сравнивать их с соседними виртуальными состояниями, находящимися с ними в определенном соответствии. С точки зрения принципа наименьшего действия природа достигает своей цели прямейшим путем, следовательно, с наименьшей затратой средств. Следовательно, более удачным было бы использование термина «принцип наименьшей затраты средств при наибольшем действии». Но термин «действие», введенный и использованный Гельмгольцем и Планком, прочно вошел в обиход, и всякая замена его другим термином была бы

ISSN: 2181-3965
VOLUME 2

неперспективной.

В исторически более ранней трактовке принцип наименьшего действия был сформулирован в виде так называемого принципа Мопертюи, но мы остановимся на принципе наименьшего действия Гамильтона.

Поскольку длина траектории из точки (0) в точку (1) является некой функцией F координат x_i, x_i', которые, в свою очередь, являются функциями времени t, то мы можем записать:

$$F(x_i)=\int_{t_0}^{t_1} f(x_i(t), x_i'(t), t)dt,$$

где F называется функционалом f или действием, а функция f, называемая функцией Лагранжа или лагранжианом такова, что действие F имеет минимальное значение из всех возможных. Это минимальное значение функционала F называется его экстремалью. Тот факт, что функция Лагранжа содержит только x_i и x_i', но не более высокие производные, является выражением указанного выше утверждения, что состояние системы полностью определяется заданием координат и скоростей.

Ясно, что значение функционала при переходе от экстремальной траектории к другой, достаточно близкой меняется. Эта близкая траектория может быть получена с помощью варьирования. Рассмотрим приращение функционала δФ при изменении координат на δx_i и $\delta x_i' = \frac{d}{dt}\delta x_i$, называемое его вариацией или дифференциалом, где δx_i – произвольные дифференцируемые функции, принимающие малые значения, причем все $\delta x_i(t_0)=\delta x_i(t_1)=0$, т.е. при варьировании экстремали начальная и конечная точки остаются неподвижными. Необходимым условием экстремальности функции является обращение в нуль совокупности членов ее дифференциала.

$$\delta F=\int_{t_0}^{t_1} f(x_i(t), x_i'(t), t)dt=\sum_i\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f}{\partial x_i'}\delta x_i'\right)dt=\sum_i\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f}{\partial x_i'}\frac{d}{dt}x_i\right)dt=0.$$

Интегрируя по частям второй подынтегральный член

$$\frac{\partial f}{\partial x_i'}\frac{d}{dt}\delta x_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i'}\delta x_i\right)-\delta x_i\frac{\partial f}{\partial x_i'},$$

получим:

$$\delta F=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i'}\delta x_i\Big|_{t_0}^{t_1}+\sum_i\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i'}\right)\right)\delta x_i dt=0.$$

ISSN: 2181-3965
VOLUME 2

Первый член равен нулю в силу задания граничных условий. Остается интеграл, который должен быть равен нулю при произвольных и независимых значениях δx_i. Это возможно только в том случае если подынтегральное выражение тождественно обращается в нуль (Лемма Дюбуа-Реймона).

Таким образом, мы получаем уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i'}\right)-\frac{\partial f}{\partial x_i}=0.$$

Эти дифференциальные уравнения называют уравнениями Эйлера – Лагранжа для функционала F. Они устанавливают связь между ускорениями, скоростями и координатами, т.е. представляют собой уравнения движения системы независимо от ее типа.

С математической точки зрения уравнения Эйлера – Лагранжа составляют систему n уравнений второго порядка для n неизвестных функций. Общее решение такой системы содержит $2n$ произвольных постоянных. Для их определения необходимо знание начальных условий, например, знание начальных значений всех координат и скоростей.

3. Экономический смысл принципа наименьшего действия. Чтобы объяснить экономический смысл функционала (действия), функции Лагранжа и уравнений Эйлера – Лагранжа более подробно рассмотрим понятие экономической системы. Известно, что в экономической теории существуют разные определения экономической системы:

как специфического преобразователя потока «природа – общество», регулирующего способ превращения природных ресурсов в жизненные средства людей;

как общественной формы выражения технологического способа соединения факторов производства;

как связующего звена системы «природа» и системы «общество».

Существенным свойством экономической системы является наличие двух полюсов общественного воспроизводства – «входа» и «выхода». На «входе» – в процессе производства активов $\left(x_i'>0\right)$ – участвуют природные и трудовые ресурсы, на «выходе» – в процессе потребления активов $\left(x_i'<0\right)$ – участвуют сами активы – предметы потребления. Активы могут принимать, а могут и не принимать участие в процессе производства. В этом смысле активы как блага (т.е. предметы потребления, приносящие определенное удовлетворение потребителю) делят на потребительские блага – удовлетворяющие потребности людей непосредственно, и блага производственного характера – удовлетворяющие потребности людей опосредовано. Между двумя этими полюсами происходит процесс реализации – распределение и обмен произведенных благ, который мы рассмотрим позднее.

Определим первый член уравнений Эйлера – Лагранжа $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i'}\right)$ как ответственный за «полюс производства», а второй член $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ как ответственный за «полюс потребления». Причем величину

$$p_i' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i'}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

где p_i – цена, в первом случае определим как первую производную по времени цены предложения, а во втором – как первую производную по времени цены спроса.

Цена предложения – это минимальная цена, по которой продавец согласен продать определенное количество блага (актива, товара или услуги), которое он произвел за определенный период (единицу) времени.

Цена спроса – это максимальная цена, по которой покупатель намерен и в состоянии приобрести определенное количество блага за определенный период времени.

В этом случае функция Лагранжа, вообще говоря, является разницей между функцией совокупного предложения и совокупного спроса, умноженной на равновесную цену.

Совокупный спрос – это общий объем благ, на который может быть предъявлен спрос (или который может быть куплен за единицу времени) при различных уровнях цен.

Совокупное предложение – это общее количество благ, которое может быть предложено (произведено за единицу времени) при разных уровнях цен.

Равновесная цена – цена на конкурентном рынке, при которой величина спроса и величина предложения равны.

Таким образом, принцип наименьшего действия в экономической системе отражает общее экономическое равновесие, т.е. ситуацию, при которой на всех рынках одновременно достигается равенство между спросом и предложением. В результате переход системы из одного состояния в другое совершается по кратчайшему пути, т.е. спрос и предложение растут максимально быстро.

ISSN: 2181-3965
VOLUME 2

В процессе развития (движения) экономической системы не все произведенные блага потребляются, некоторые могут накапливаться. В первую очередь это относится к тем благам, которые могут быть использованы многократно (ликвидные активы – наличные деньги, золото, депозиты; товары длительного пользования; недвижимость; земля и т.д.), однако могут накапливаться и блага, используемые в потреблении только один раз, если они имеют достаточный срок хранения без потери их потребительских свойств. Совокупность этих накопленных активов, принадлежащих субъектам экономической системы, образует *богатство*. Общий запас богатства страны определяется показателем так называемого «реализуемого имущества», под которым понимаются физические и финансовые активы, характеризующиеся достаточно высоким уровнем ликвидности (быстрой реализуемости). Величина накопленного со временем богатства вычисляется как функционал (действие). При наиболее быстром развитии экономической системы, когда спрос и предложение растут с максимальной скоростью, богатство системы принимает минимальное значение из всех возможных (является экстремалью функционала).

Введение понятия цены важно еще и со следующей точки зрения. Рассматривая цены благ в качестве координат, мы можем произвести замену координат в нашей системе. Мы можем перейти от координат (x_i', x_i) к координатам (x_i', p_i) или координатам (x_i, p_i), которые также будут независимыми и существенными. Какую систему координат использовать в дальнейшем, будет определяться только соображениями удобства рассмотрения.

Как уже упоминалось выше, принцип наименьшего действия задает движение системы при «обычных условиях», т.е. для большинства случаев. При таком движении система проходит через непрерывную последовательность равновесных состояний и двигается при этом по кратчайшему пути. Если вывести систему из равновесия, то она отклоняется от своей экстремали, при этом путь системы удлиняется.

Заключение

Применение принципа наименьшего действия к решению практических задач экономики может существенно повысить эффективность хозяйственных процессов. Такой вывод вытекает из объективно существующего факта материальной основы явлений и процессов окружающего нас мира. Все эти явления и процессы не могут не соответствовать и не подчиняться его фундаментальным законам. Этим же законам должны соответствовать и подчиняться экономические процессы и явления. И так же, как принцип наименьшего действия играет ведущую роль в естественных процессах и явлениях, так же этот принцип должен играть ведущую роль в экономических процессах.

Литература

1. Ланкастер К. Математическая экономика. – М: Советское радио, 1972. – С. 214-219.

2. Аркин В. И., Сластников А. Д., Аркина С. В. Стимулирование инвестиционных проектов с помощью механизмов амортизации. //Консорциум экономических исследований и образования. Серия «Научные доклады». 2002. №02/05. С. 75-85.

3. Maupertuis P. L. M. Accord de différentes loix de la Nature qui avoient jusqu’ici paru incompatibles // Histoire de l’Académie des Sciences de Paris. Paris, 1744.

4. Тюлина И.А. История и методология механики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 282 с

5. Вариационные принципы механики: сборник статей классиков науки / под ред. Л.С. Полака. – М.: Физматгиз, 1959. – 932 с.

6. Царев И.Г. Принципы движения экономической системы. АиФА, 2007, №1, с. 105-142.

7. Царев И.Г. Равновесие экономической системы// Вестник НГУ. Серия: социально-экономические науки/ Новосиб.гос.ун-т. Новосибирск, 2004. – Т. 4. – Вып. 1. – 164 с., с. 83 – 96.

8. Бабаджанов Ш.Ш. Вариационные методы и экономические задачи// Наукові конференції в Україні і світі. Киев, 2016, с.14-16.